Diamond D

Die Diamond D Surface wird nach folgender Gleichung berechnet.

$$\sin(x)\sin(y)\sin(z)+\sin(x)\cos(y)\cos(z)+\cos(x)\sin(y)\cos(z)+\cos(x)\cos(y)\sin(z)=0 \qquad \text{Gl. 1}$$

Alternativ läßt sich die Diamond D Surface auch nach folgender Gleichung berechnen.

$$\sin(x+y+z)+\sin(-x+y+z)+\sin(x-y+z)+\sin(x+y-z)=0 \qquad \text{Gl. 2}$$

Wenn beide Gleichungen das gleiche Ergebnis liefern dann muss sich Gl. 2 in Gl. 1 umformen lassen.

Dazu benutzen wir folgendes Additionstheorem aus einer Formelsammlung.

$$\sin(a+b+c)=\sin(a)\cos(b)\cos(c)+\cos(a)\sin(b)\cos(c)+\cos(a)\cos(b)\sin(c)-\sin(a)\sin(b)\sin(c) \qquad \text{Gl. 3}$$

Gl. 2 vereinfachen wir zur besseren Übersichtlichkeit.

$$A+B+C+D=0 \qquad \text{Gl. 4}$$

mit

$$A=\sin(x+y+z) \qquad \text{Gl. 5}$$
$$B=\sin(-x+y+z) \qquad \text{Gl. 6}$$
$$C=\sin(x-y+z) \qquad \text{Gl. 7}$$
$$D=\sin(x+y-z) \qquad \text{Gl. 8}$$

Jetzt setzen wir Gl. 3 in Gl. 5 ein.

$$A=\sin(x+y+z)=\sin(x)\cos(y)\cos(z)+\cos(x)\sin(y)\cos(z)+\cos(x)\cos(y)\sin(z)-\sin(x)\sin(y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 9}$$

Jetzt setzen wir Gl. 3 in Gl. 6 ein.

$$B=\sin(-x+y+z)=\sin(-x)\cos(y)\cos(z)+\cos(-x)\sin(y)\cos(z)+\cos(-x)\cos(y)\sin(z)-\sin(-x)\sin(y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 10}$$

Um das störende "-x" zu beseitigen nutzen wir folgende Zusammenhänge.

$$\sin(-a)=-\sin(a) \qquad \text{Gl. 11}$$
$$\cos(-a)=\cos(a) \qquad \text{Gl. 12}$$

Gl. 11 und Gl. 12 setzen wir in Gl. 10 ein.

$$B=-\sin(x)\cos(y)\cos(z)+\cos(x)\sin(y)\cos(z)+\cos(x)\cos(y)\sin(z)+\sin(x)\sin(y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 13}$$

Jetzt setzen wir Gl. 3 in Gl. 7 ein.

$$C=\sin(x-y+z)=\sin(x)\cos(-y)\cos(z)+\cos(x)\sin(-y)\cos(z)+\cos(x)\cos(-y)\sin(z)-\sin(x)\sin(-y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 14}$$

Um das störende "-y" zu beseitigen setzen wir Gl. 11 und Gl. 12 in Gl. 14 ein.

$$C=\sin(x)\cos(y)\cos(z)-\cos(x)\sin(y)\cos(z)+\cos(x)\cos(y)\sin(z)+\sin(x)\sin(y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 15}$$

Jetzt setzen wir Gl. 3 in Gl. 8 ein.

$$D=\sin(x+y-z)=\sin(x)\cos(y)\cos(-z)+\cos(x)\sin(y)\cos(-z)+\cos(x)\cos(y)\sin(-z)-\sin(x)\sin(y)\sin(-z) \qquad \text{Gl. 16}$$

Um das störende "-z" zu beseitigen setzen wir Gl. 11 und Gl. 12 in Gl. 16 ein.

$$D=\sin(x)\cos(y)\cos(z)+\cos(x)\sin(y)\cos(z)-\cos(x)\cos(y)\sin(z)+\sin(x)\sin(y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 17}$$

Im nächsten Schritt addieren wir A und B.

$$A+B=\sin(x)\cos(y)\cos(z)+\cos(x)\sin(y)\cos(z)+\cos(x)\cos(y)\sin(z)-\sin(x)\sin(y)\sin(z)$$
$$-\sin(x)\cos(y)\cos(z)+\cos(x)\sin(y)\cos(z)+\cos(x)\cos(y)\sin(z)+\sin(x)\sin(y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 18}$$

Gl 18 läßt sich vereinfachen.

$$A+B=2\cos(x)\sin(y)\cos(z)+2\cos(x)\cos(y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 19}$$

Im nächsten Schritt addieren wir C und D.

$$C+D=\sin(x)\cos(y)\cos(z)-\cos(x)\sin(y)\cos(z)+\cos(x)\cos(y)\sin(z)+\sin(x)\sin(y)\sin(z)$$
$$+\sin(x)\cos(y)\cos(z)+\cos(x)\sin(y)\cos(z)-\cos(x)\cos(y)\sin(z)+\sin(x)\sin(y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 20}$$

Gl 20 läßt sich vereinfachen.

$$C+D=2\sin(x)\cos(y)\cos(z)+2\sin(x)\sin(y)\sin(z) \qquad \text{Gl. 21}$$

Jetzt setzen wir Gl. 19 und Gl. 21 in Gl. 4 ein.

$$2\cos(x)\sin(y)\cos(z)+2\cos(x)\cos(y)\sin(z)+2\sin(x)\cos(y)\cos(z)+2\sin(x)\sin(y)\sin(z)=0 \qquad \text{Gl. 22}$$

Beide Seiten teilen wir durch 2.

$$\cos(x)\sin(y)\cos(z)+\cos(x)\cos(y)\sin(z)+\sin(x)\cos(y)\cos(z)+\sin(x)\sin(y)\sin(z)=0 \qquad \text{Gl. 23}$$

Jetzt brauchen wir Gl. 23 nur ein bischen anders anordnen und erhalten Gl. 1, was zu beweisen war.

$$\sin(x)\sin(y)\sin(z)+\sin(x)\cos(y)\cos(z)+\cos(x)\sin(y)\cos(z)+\cos(x)\cos(y)\sin(z)=0 \qquad \text{Gl. 1}$$