

$$\prod_{i=0}^{i < n} [x \cos(\frac{i\pi}{n}) + y \sin(\frac{i\pi}{n})] - z = 0$$

Für $n = 5$ gilt

$$[x \cos(\frac{0\pi}{5}) + y \sin(\frac{0\pi}{5})][x \cos(\frac{1\pi}{5}) + y \sin(\frac{1\pi}{5})][x \cos(\frac{2\pi}{5}) + y \sin(\frac{2\pi}{5})][x \cos(\frac{3\pi}{5}) + y \sin(\frac{3\pi}{5})][x \cos(\frac{4\pi}{5}) + y \sin(\frac{4\pi}{5})] - z = 0$$

Mit

$$\begin{array}{ll} \cos(\frac{0\pi}{5}) = \cos(0^\circ) = 1 & \sin(\frac{0\pi}{5}) = \sin(0^\circ) = 0 \\ \cos(\frac{1\pi}{5}) = \cos(36^\circ) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} & \sin(\frac{1\pi}{5}) = \sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \cos(\frac{2\pi}{5}) = \cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} & \text{und} \quad \sin(\frac{2\pi}{5}) = \sin(72^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \cos(\frac{3\pi}{5}) = \cos(108^\circ) = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} & \sin(\frac{3\pi}{5}) = \sin(108^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \cos(\frac{4\pi}{5}) = \cos(144^\circ) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} & \sin(\frac{4\pi}{5}) = \sin(144^\circ) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \end{array}$$

erhalten wir

$$x \left[\frac{1+\sqrt{5}}{4}x + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}y \right] \left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}x + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}y \right] \left[-\frac{\sqrt{5}-1}{4}x + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}y \right] \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{4}x + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}y \right] - z = 0$$

Jetzt wird das Ausmultiplizieren etwas komplizierter, deshalb gehen wir schrittweise vor. Wir führen A, B, C und D ein.

$$x[A \cdot B \cdot C \cdot D] - z = 0$$

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{4}x + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}y$$

$$B = \frac{\sqrt{5}-1}{4}x + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}y$$

$$C = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}x + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}y$$

$$D = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}x + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}y$$

Um das Ausmultiplizieren zu vereinfachen stellen wir die Gleichungen etwas um.

$$A = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} y + \frac{1+\sqrt{5}}{4} x$$

$$B = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} y + \frac{\sqrt{5}-1}{4} x$$

$$C = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} y - \frac{\sqrt{5}-1}{4} x$$

$$D = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} y - \frac{1+\sqrt{5}}{4} x$$

Jetzt nutzen wir die binomische Formel aus einer Formelsammlung.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Danach müssen wir A mit D und B mit C multiplizieren.

$$E = A \cdot D = \left[\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} y + \frac{1+\sqrt{5}}{4} x \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} y - \frac{1+\sqrt{5}}{4} x \right]$$

$$E = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} y^2 - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{16} x^2$$

$$(1+\sqrt{5})^2 = (1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$E = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} y^2 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} x^2$$

$$F = B \cdot C = \left[\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} y + \frac{\sqrt{5}-1}{4} x \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} y - \frac{\sqrt{5}-1}{4} x \right]$$

$$F = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} y^2 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} x^2$$

$$(\sqrt{5}-1)^2 = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-1) = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$$

$$F = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} y^2 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} x^2$$

Jetzt müssen wir noch E und F miteinander multiplizieren.

$$E \cdot F = \left[\frac{10-2\sqrt{5}}{16} y^2 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} x^2 \right] \cdot \left[\frac{10+2\sqrt{5}}{16} y^2 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} x^2 \right]$$

$$E \cdot F = \frac{100-20}{256} y^4 - \frac{(10-2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{256} x^2 y^2 - \frac{(6+2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{256} x^2 y^2 + \frac{36-20}{256} x^4$$

$$E \cdot F = \frac{5}{16} y^4 - \frac{(10-2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{256} x^2 y^2 - \frac{(6+2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{256} x^2 y^2 + \frac{1}{16} x^4$$

Jetzt müssen wir noch den mittleren Part vereinfachen.

$$(10-2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})=60-20\sqrt{5}-12\sqrt{5}+20=80-32\sqrt{5}$$

$$(6+2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})=60+12\sqrt{5}+20\sqrt{5}+20=80+32\sqrt{5}$$

$$E \cdot F = \frac{5}{16} y^4 - \frac{80-32\sqrt{5}}{256} x^2 y^2 - \frac{80+32\sqrt{5}}{256} x^2 y^2 + \frac{1}{16} x^4$$

$$E \cdot F = \frac{5}{16} y^4 + \frac{-80+32\sqrt{5}}{256} x^2 y^2 + \frac{-80-32\sqrt{5}}{256} x^2 y^2 + \frac{1}{16} x^4$$

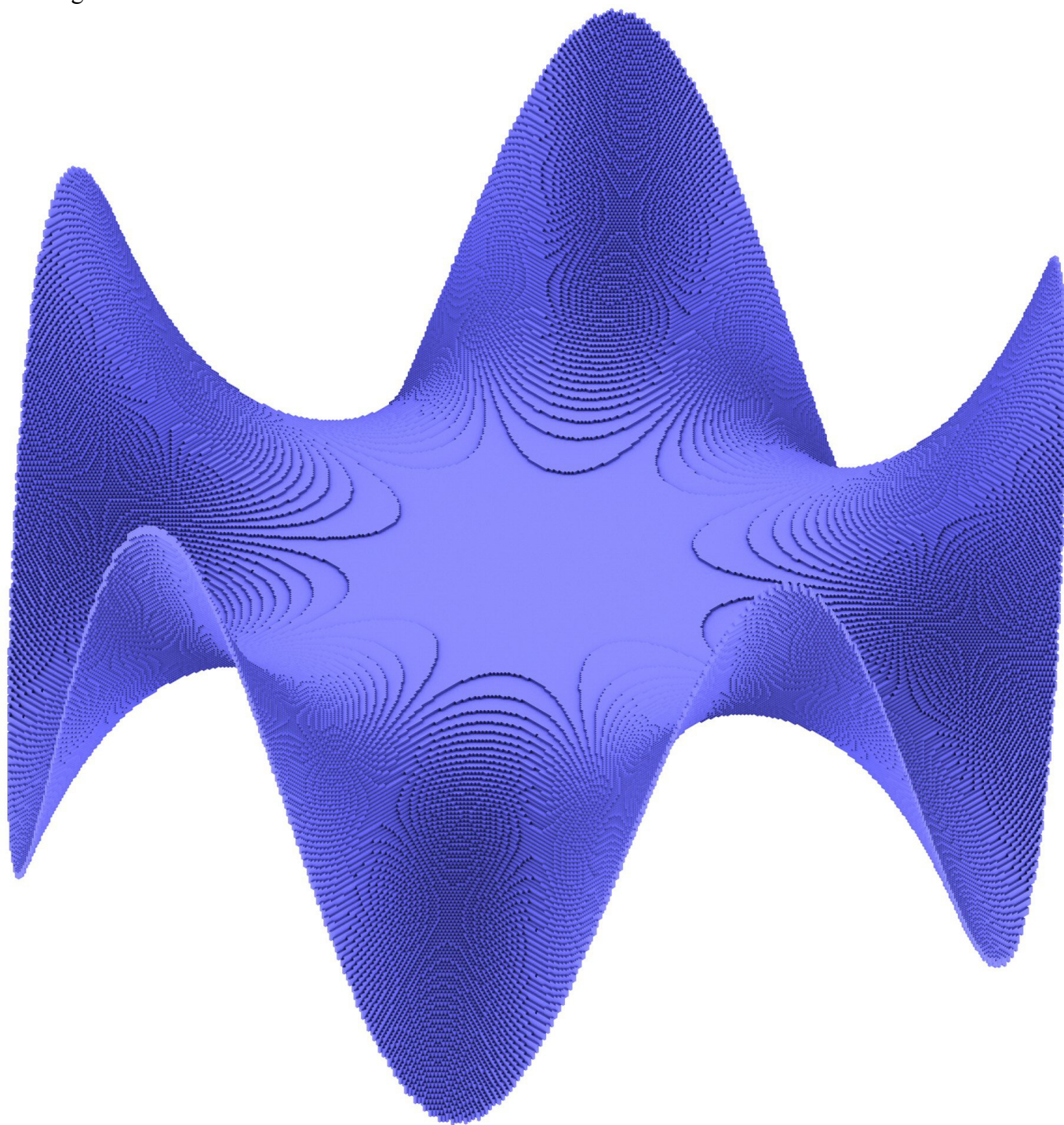
$$E \cdot F = \frac{5}{16} y^4 + \frac{-160}{256} x^2 y^2 + \frac{1}{16} x^4$$

$$E \cdot F = \frac{5}{16} y^4 - \frac{10}{16} x^2 y^2 + \frac{1}{16} x^4$$

Damit erhält man für $n = 5$

$$x \left[\frac{1}{16} x^4 - \frac{10}{16} x^2 y^2 + \frac{5}{16} y^4 \right] - z = 0$$

Das Ergebnis der Formel.



(c) 2020 www.3d-meier.de